12

MATEMÁTICA A
PREPARAR O EXAME

12.º ano • Ensino Secundário

Ana Martins • Helena Salomé
Liliana dos Prazeres Silva • José Carlos da Silva Pereira

raiz
EDITORA

CAPÍTULO I
CONTEÚDOS DE 10.º E 11.º ANOS

CAPÍTULO II

CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

CAPÍTULO III
FUNÇÕES

CAPÍTULO IV
NÚMEROS COMPLEXOS

CAPÍTULO V
PRIMITIVAS E CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO VI
EXAMES-TIPO

3. Progressões aritméticas e geométricas

	Progressões aritméticas de razão $r \in \mathbb{R}$	Progressões geométricas de razão $r \in \mathbb{R}$
Definição	$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \,, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ logo $u_{n+1} - u_n = r \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r \,, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ logo $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r \,, \forall n \in \mathbb{N}$
Termo geral	$u_n = u_1 + r(n-1)$ ou $u_n = u_p + r(n-p)$	$u_n = u_1 \times r^{n-1}$ ou $u_n = u_p \times r^{n-p}$
Soma dos n primeiros termos	$S_N = \dfrac{u_1 + u_N}{2} \times N$	$S_N = u_1 \times \dfrac{1-r^N}{1-r}$
Propriedades	• Se $r<0$, (u_n) é decrescente e não limitada. • Se $r=0$, (u_n) é constante e limitada. • Se $r>0$, (u_n) é crescente e não limitada.	• Se $r<-1$, (u_n) é não monótona e não limitada. • Se $-1 \leqslant r < 0$, (u_n) é não monótona e limitada . • Se $r=1$, (u_n) é constante e limitada • Se $0<r<1$ e $a>0$, (u_n) é decrescente e limitada. • Se $0<r<1$ e $a<0$, (u_n) é crescente e limitada. • Se $r>1$ e $a>0$, (u_n) é crescente e não limitada. • Se $r>1$ e $a<0$, (u_n) é decrescente e não limitada.

QUESTÕES RESOLVIDAS

1 Acerca da sucessão (d_n), tal que $d_n = -\dfrac{1}{n}$, qual das afirmações é verdadeira?

(A) $-1 \leqslant d_n < 0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(B) $d_n \leqslant -1 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(C) A sucessão é monótona decrescente

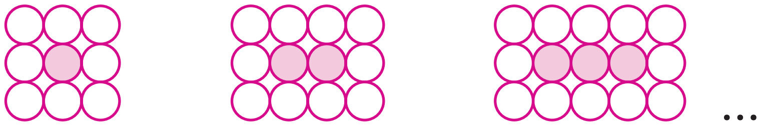
(D) A sucessão não é monótona

Proposta de resolução

- $d_{n+1} - d_n = -\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{-n+n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{>0}} > 0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$, logo (d_n) é uma sucessão monótona crescente.
- $d_1 = -1$ e a sucessão é crescente, logo $d_n \geqslant -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Como $-\dfrac{1}{n} < 0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$, vem que $d_n < 0$. Assim, $-1 \leqslant d_n < 0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Resposta: A

2 Na figura estão representados os três primeiros termos de uma sequência de figuras. Considera a sucessão, (c_n), do número de círculos em cada figura.



2.1 Qual é o termo geral da sucessão (c_n) ?

2.2 Determina o termo de ordem 5 .

2.3 Prova que esta sucessão é monótona crescente.

2.4 Mostra que esta sucessão é minorada e determina o maior dos minorantes.

Proposta de resolução

2.1 O termo geral da sucessão do número de círculos cor-de-rosa é n .
Em relação à sucessão do número de círculos brancos tem-se que:

- o $1.^\circ$ termo é $3+3+1+1=8$,
- o $2.^\circ$ termo é $4+4+1+1=10$,
- o $3.^\circ$ termo é $5+5+1+1=12$,
- o n-ésimo termo é $(n+2)+(\mathrm{n}+2)+1+1=2n+6$.

Portanto, o termo geral do número total de círculos é dado por $n+2n+6=3n+6$. Logo $c_n=3_n+6$.

2.2 O termo de ordem 5 , c_5 , é $c_5=3\times 5+3=18$.

2.3 $c_{n+1}-c_n=3(n+1)+6-(3n+6)=3$. Assim, $c_{n+1}-c_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pelo que a sucessão é monótona crescente.

2.4 Como (c_n) é crescente, $c_n\geqslant c_1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pelo que $c_1=9$ é o maior dos minorantes.

3 Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n=\dfrac{kn+3}{2n}$, $k\in\mathbb{R}$.

3.1 Determina o valor de k sabendo que $u_1=-1$.

3.2 Estuda a sucessão quanto à monotonia.

3.3 Será esta sucessão limitada? Justifica a tua resposta.

Proposta de resolução

3.1 $u_1=-1 \Leftrightarrow \dfrac{k\times 1+3}{2\times 1}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{k+3}{2}=-1 \Leftrightarrow k+3=-2 \Leftrightarrow k=-5$

3.2 $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-5(n+1)+3}{2(n+1)}-\dfrac{-5n+3}{2n}=\dfrac{-5n-2}{2n+2}+\dfrac{5n-3}{2n}=$

$$=\frac{-10n^2-4n+10n^2-6n+10n-6}{2n(2n+2)}=\frac{-6}{2n(2n+2)}$$

Como $2n(2n+2)>0$, vem que $\dfrac{-6}{2n(2n+2)}<0$ e, portanto, $u_{n+1}-u_n<0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Logo, (u_n) é uma sucessão monótona decrescente.

35 Uma empresa que produz pilhas vai lançar um novo modelo. Dos estudos de mercado realizados concluiu-se que o custo de produção de cada unidade desde novo modelo aumenta 8% a cada seis meses. Admite que o custo inicial é de a euros e seja C a função que dá o custo de produção de cada unidade desta pilha em função de t, tempo medido em anos, a partir do instante em que a produção se inicia.

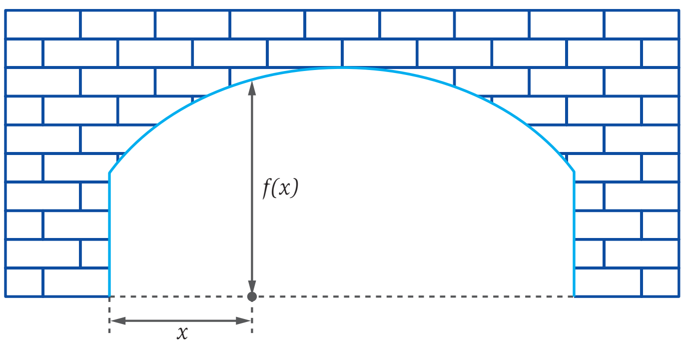
35.1 Mostra que $C(t)=a\times(1{,}08)^{2t}$ e determina ao fim de quanto tempo o custo de produção de cada unidade desta pilha duplica. Apresenta o resultado em anos e meses, com os meses arredondados às unidades.

35.2 Admite agora que $a=2$. O mesmo estudo refere também que o preço de venda de cada uma destas pilhas deve variar de acordo com a função $p(t)=-0{,}01t^2+0{,}6t+3$ e que o número que pilhas vendidas, em milhares, é dado por $N(t)=3e^{0{,}8t}$, sendo t o tempo medido em anos a partir do instante em que a produção se inicia. Utilizando a calculadora gráfica, resolve as alíneas seguintes.

a. Ao fim de quanto tempo deixarão de dar lucro a produção e venda destas pilhas? Apresenta o resultado em anos e meses, com os meses arredondados às unidades.

b. Ao fim de quanto tempo é máximo o lucro de venda destas pilhas? Indica esse valor.
Apresenta o tempo em anos e meses, com os meses arredondados às unidades e o valor do lucro máximo em euros.

36 A figura representa um túnel sobre uma estrada.



Considera a função f definida por

$f(x)=a-b\left(e^{0{,}25x-1{,}5}+e^{-0{,}25x+1{,}5}\right)$, a e $b\in\mathbb{R}^+$.

Admite que $f(x)$ é a distância ao arco, em metros, do ponto da estrada que se situa a x metros do pilar da esquerda, com $x\in[0\,,\,12]$.

36.1 Sabendo que a altura dos pilares é de $6{,}59$ metros e que a distância ao arco do ponto da estrada que se situa a 4 metros do pilar da direita é de $11{,}49$ metros, determina os valores de a e de b.
Apresenta os valores de a e de b arredondados às unidades. No caso de fazeres arredondamentos nos cálculos intermédios, utiliza no mínimo duas casas decimais.

36.2 Considera agora que $a=16$ e $b=2$.

a. Determina os valores de x para os quais a altura do arco é de 8 metros.
Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

b. Determina a altura máxima do arco.

PREPARAR O EXAME

Itens de escolha múltipla

Na resposta a cada uma das questões deste grupo, seleciona a única resposta correta.

1 Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que $u_n \longrightarrow 2$ para $n \geqslant 300$, $v_n \leqslant \dfrac{(u_n)^2 - 1}{u_n}$.

Qual não pode ser o valor de $\lim v_n$?

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{3}{2}$

(B) 1 **(D)** 2

2 Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n+1}$$

Sabendo que para $n \geqslant 1000$ se tem $v_n \leqslant -\dfrac{n}{u_n}$, qual é o valor de $\lim v_n$?

(A) $-\infty$ **(C)** 1

(B) 0 **(D)** $+\infty$

3 Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) três sucessões tais que $\lim v_n = 0$, $\lim w_n = 2$ e para $n \geqslant 10^6$ tem-se

$$\frac{v_n + 2}{w_n} \leqslant u_n \leqslant (w_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Qual é o valor de $\lim \sqrt{\dfrac{4}{u_n}}$?

(A) $-\infty$ **(C)** 2

(B) 1 **(D)** $+\infty$

4 Qual é o valor de $\lim \dfrac{n^2 + \cos(n)}{1 - n^2}$?

(A) $-\infty$ **(C)** 1

(B) -1 **(D)** $+\infty$

5 Sejam g a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\ ,\ 0\}$ definida por $g(x) = \dfrac{1 - e^{x+3}}{x(x+3)^2}$ e h uma função real de variável real tal que $h(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow x < -3$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -3^-} h(x)$?

(A) $-\infty$ **(C)** 1

(B) 0 **(D)** $+\infty$

6 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, estritamente decrescente, tal que a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao seu gráfico.
De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que

$$(f(x))^2 \leqslant g(x) \leqslant f(x) + 6\ ,\ \forall x \geqslant 1.$$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2g(x) - 8}{\ln(g(x) - 3)}$?

(A) 1 **(C)** 3

(B) 2 **(D)** 4

7 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2^{1 + \operatorname{sen} x} - 1}{x^2 + 1}.$$

Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função g?

(A) $\dfrac{x}{x^2+1}$ **(C)** $\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

(B) $\dfrac{1}{x^2+1}$ **(D)** $\dfrac{3}{x^2+1}$

8 Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

- g é contínua em $\mathbb{R}$ e $x < 3 \Longrightarrow g(x) > 0$
- $(f \times g)(2) > 0$, $(f - g)(2) = -2$ e $g(4) = -g(2)$

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

(A) $\exists c \in]2\ ,\ 4[: g(c) = 0$

(B) $\exists c \in]2\ ,\ 4[: g(c) = -2$

(C) $\exists c \in]2\ ,\ 4[: g(c) = -3$

(D) $\exists c \in]2\ ,\ 4[: g(c) = 1$