

# 12

**MATEMÁTICA A**  
**PREPARAR**  
**O EXAME**

**12.º ano • Ensino Secundário**

Ana Martins • Helena Salomé

Liliana dos Prazeres Silva • José Carlos da Silva Pereira

# CAPÍTULO I

## CONTEÚDOS DE 10.º E 11.º ANOS

<b>LÓGICA E TEORIA DOS CONJUNTOS</b> .....	10
Questões resolvidas .....	12
Questões propostas .....	13
<b>RADICAIS E POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL</b> .....	16
Questões resolvidas .....	18
Questões propostas .....	20
<b>GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO</b> .....	23
Questões resolvidas .....	26
Questões propostas .....	30
<b>CÁLCULO VETORIAL NO PLANO E NO ESPAÇO</b> .....	34
Questões resolvidas .....	41
Questões propostas .....	49
<b>SUCESSÕES</b> .....	58
Questões resolvidas .....	60
Questões propostas .....	66
<b>LIMITES DE SUCESSÕES</b> .....	72
Questões resolvidas .....	74
Questões propostas .....	78
<b>FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</b> .....	81
Questões resolvidas .....	83
Questões propostas .....	88
<b>LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</b> .....	92
Questões resolvidas .....	97
Questões propostas .....	101
<b>CONTINUIDADE</b> .....	103
Questões resolvidas .....	104
Questões propostas .....	105
<b>ASSÍNTOTAS AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO</b> .....	106
Questões resolvidas .....	108
Questões propostas .....	111
<b>DERIVADA DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</b> .....	114
Questões resolvidas .....	117
Questões propostas .....	123

<b>ESTATÍSTICA</b> .....	128
Questões resolvidas .....	133
Questões propostas .....	137
<b>TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS</b> .....	141
Questões resolvidas .....	150
Questões propostas .....	157
<b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	161

## CAPÍTULO II

### CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

<b>OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS</b> .....	166
Questões resolvidas .....	168
Questões propostas .....	169
<b>CÁLCULO COMBINATÓRIO. TRIÂNGULO DE PASCAL. BINÓMIO DE NEWTON</b> .....	170
Questões resolvidas .....	174
Questões propostas .....	182
<b>ESPAÇOS DE PROBABILIDADE. REGRA DE LAPLACE.</b>	
<b>PROBABILIDADE CONDICIONADA</b> .....	187
Questões resolvidas .....	189
Questões propostas .....	199
<b>PREPARAR O EXAME</b>	
Itens de escolha múltipla .....	209
Itens de resposta aberta .....	216
<b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	229

## CAPÍTULO III

### FUNÇÕES

<b>LIMITES E CONTINUIDADE</b> .....	232
Questões resolvidas .....	234
Questões propostas .....	240
<b>DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</b> .....	243
Questões resolvidas .....	244
Questões propostas .....	249
<b>TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS</b> .....	251
Questões resolvidas .....	255
Questões propostas .....	268
<b>JUROS COMPOSTOS E NÚMERO DE NEPER</b> .....	276
Questões resolvidas .....	277
Questões propostas .....	278
<b>FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS</b> .....	279
Questões resolvidas .....	283
Questões propostas .....	297
<b>PREPARAR O EXAME</b>	
Itens de escolha múltipla .....	305
Itens de resposta aberta .....	321
<b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	353

## CAPÍTULO IV

### NÚMEROS COMPLEXOS

<b>NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	362
Questões resolvidas .....	370
Questões propostas .....	384
<b>PREPARAR O EXAME</b>	
Itens de escolha múltipla .....	389
Itens de resposta aberta .....	394
<b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	402

## CAPÍTULO V

### PRIMITIVAS E CÁLCULO INTEGRAL

<b>PRIMITIVAS E CÁLCULO INTEGRAL</b> .....	406
Questões resolvidas .....	409
Questões propostas .....	413
 <b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	 418

## CAPÍTULO VI

### EXAMES-TIPO

<b>EXAME-TIPO 1</b> .....	420
<b>EXAME-TIPO 2</b> .....	424
<b>EXAME-TIPO 3</b> .....	429
<b>EXAME-TIPO 4</b> .....	434
<b>EXAME-TIPO 5</b> .....	439
 <b>SOLUCIONÁRIO</b> .....	 444

### 3. Progressões aritméticas e geométricas

	Progressões aritméticas de razão $r \in \mathbb{R}$	Progressões geométricas de razão $r \in \mathbb{R}$
Definição	$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ <p>logo <math>u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}</math></p>	$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ <p>logo <math>\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}</math></p>
Termo geral	$u_n = u_1 + r(n - 1)$ ou $u_n = u_p + r(n - p)$	$u_n = u_1 \times r^{n-1}$ ou $u_n = u_p \times r^{n-p}$
Soma dos $n$ primeiros termos	$S_N = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$	$S_N = u_1 \times \frac{1 - r^N}{1 - r}$
Propriedades	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se <math>r &lt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é decrescente e não limitada.</li> <li>Se <math>r = 0</math>, <math>(u_n)</math> é constante e limitada.</li> <li>Se <math>r &gt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é crescente e não limitada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se <math>r &lt; -1</math>, <math>(u_n)</math> é não monótona e não limitada.</li> <li>Se <math>-1 \leq r &lt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é não monótona e limitada.</li> <li>Se <math>r = 1</math>, <math>(u_n)</math> é constante e limitada.</li> <li>Se <math>0 &lt; r &lt; 1</math> e <math>a &gt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é decrescente e limitada.</li> <li>Se <math>0 &lt; r &lt; 1</math> e <math>a &lt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é crescente e limitada.</li> <li>Se <math>r &gt; 1</math> e <math>a &gt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é crescente e não limitada.</li> <li>Se <math>r &gt; 1</math> e <math>a &lt; 0</math>, <math>(u_n)</math> é decrescente e não limitada.</li> </ul>

### QUESTÕES RESOLVIDAS

1 Acerca da sucessão  $(d_n)$ , tal que  $d_n = -\frac{1}{n}$ , qual das afirmações é verdadeira?

(A)  $-1 \leq d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

(B)  $d_n \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$

(C) A sucessão é monótona decrescente

(D) A sucessão não é monótona

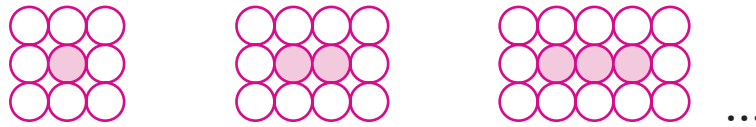


#### Proposta de resolução

- $d_{n+1} - d_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{>0}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , logo  $(d_n)$  é uma sucessão monótona crescente.
- $d_1 = -1$  e a sucessão é crescente, logo  $d_n \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Como  $-\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , vem que  $d_n < 0$ . Assim,  $-1 \leq d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Resposta: A

- 2 Na figura estão representados os três primeiros termos de uma sequência de figuras. Considera a sucessão,  $(c_n)$ , do número de círculos em cada figura.



- 2.1 Qual é o termo geral da sucessão  $(c_n)$  ?  
 2.2 Determina o termo de ordem 5 .  
 2.3 Prova que esta sucessão é monótona crescente.  
 2.4 Mostra que esta sucessão é minorada e determina o maior dos minorantes.



### Proposta de resolução

- 2.1 O termo geral da sucessão do número de círculos cor-de-rosa é  $n$  .  
 Em relação à sucessão do número de círculos brancos tem-se que:
- o 1.º termo é  $3 + 3 + 1 + 1 = 8$  ,
  - o 2.º termo é  $4 + 4 + 1 + 1 = 10$  ,
  - o 3.º termo é  $5 + 5 + 1 + 1 = 12$  ,
  - o  $n$ -ésimo termo é  $(n + 2) + (n + 2) + 1 + 1 = 2n + 6$  .
- Portanto, o termo geral do número total de círculos é dado por  $n + 2n + 6 = 3n + 6$  . Logo  $c_n = 3n + 6$  .
- 2.2 O termo de ordem 5 ,  $c_5$  , é  $c_5 = 3 \times 5 + 6 = 21$  .
- 2.3  $c_{n+1} - c_n = 3(n + 1) + 6 - (3n + 6) = 3$  . Assim,  $c_{n+1} - c_n > 0$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  , pelo que a sucessão é monótona crescente.
- 2.4 Como  $(c_n)$  é crescente,  $c_n \geq c_1$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  , pelo que  $c_1 = 9$  é o maior dos minorantes.
- 3 Considera a sucessão  $(u_n)$  definida por  $u_n = \frac{kn + 3}{2n}$  ,  $k \in \mathbb{R}$  .
- 3.1 Determina o valor de  $k$  sabendo que  $u_1 = -1$  .  
 3.2 Estuda a sucessão quanto à monotonia.  
 3.3 Será esta sucessão limitada? Justifica a tua resposta.



### Proposta de resolução

- 3.1  $u_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{k \times 1 + 3}{2 \times 1} = -1 \Leftrightarrow \frac{k + 3}{2} = -1 \Leftrightarrow k + 3 = -2 \Leftrightarrow k = -5$
- 3.2  $u_{n+1} - u_n = \frac{-5(n+1) + 3}{2(n+1)} - \frac{-5n + 3}{2n} = \frac{-5n - 2}{2n + 2} + \frac{5n - 3}{2n} =$   
 $= \frac{-10n^2 - 4n + 10n^2 - 6n + 10n - 6}{2n(2n + 2)} = \frac{-6}{2n(2n + 2)}$

Como  $2n(2n + 2) > 0$  , vem que  $\frac{-6}{2n(2n + 2)} < 0$  e, portanto,  $u_{n+1} - u_n < 0$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  . Logo,  $(u_n)$  é uma sucessão monótona decrescente.

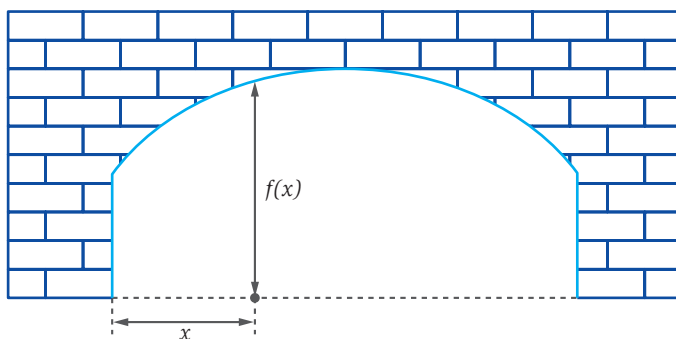
**35** Uma empresa que produz pilhas vai lançar um novo modelo. Dos estudos de mercado realizados concluiu-se que o custo de produção de cada unidade desde novo modelo aumenta 8% a cada seis meses. Admite que o custo inicial é de  $a$  euros e seja  $C$  a função que dá o custo de produção de cada unidade desta pilha em função de  $t$ , tempo medido em anos, a partir do instante em que a produção se inicia.

**35.1** Mostra que  $C(t) = a \times (1,08)^{2t}$  e determina ao fim de quanto tempo o custo de produção de cada unidade desta pilha duplica. Apresenta o resultado em anos e meses, com os meses arredondados às unidades.

**35.2** Admite agora que  $a = 2$ . O mesmo estudo refere também que o preço de venda de cada uma destas pilhas deve variar de acordo com a função  $p(t) = -0,01t^2 + 0,6t + 3$  e que o número que pilhas vendidas, em milhares, é dado por  $N(t) = 3e^{0,8t}$ , sendo  $t$  o tempo medido em anos a partir do instante em que a produção se inicia. Utilizando a calculadora gráfica, resolve as alíneas seguintes.

- Ao fim de quanto tempo deixarão de dar lucro a produção e venda destas pilhas? Apresenta o resultado em anos e meses, com os meses arredondados às unidades.
- Ao fim de quanto tempo é máximo o lucro de venda destas pilhas? Indica esse valor. Apresenta o tempo em anos e meses, com os meses arredondados às unidades e o valor do lucro máximo em euros.

**36** A figura representa um túnel sobre uma estrada.



Considera a função  $f$  definida por

$$f(x) = a - b \left( e^{0,25x - 1,5} + e^{-0,25x + 1,5} \right), \quad a \text{ e } b \in \mathbb{R}^+.$$

Admite que  $f(x)$  é a distância ao arco, em metros, do ponto da estrada que se situa a  $x$  metros do pilar da esquerda, com  $x \in [0, 12]$ .

**36.1** Sabendo que a altura dos pilares é de 6,59 metros e que a distância ao arco do ponto da estrada que se situa a 4 metros do pilar da direita é de 11,49 metros, determina os valores de  $a$  e de  $b$ . Apresenta os valores de  $a$  e de  $b$  arredondados às unidades. No caso de fazeres arredondamentos nos cálculos intermédios, utiliza no mínimo duas casas decimais.

**36.2** Considera agora que  $a = 16$  e  $b = 2$ .

- Determina os valores de  $x$  para os quais a altura do arco é de 8 metros. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.
- Determina a altura máxima do arco.



## PREPARAR O EXAME

## Itens de escolha múltipla

Na resposta a cada uma das questões deste grupo, seleciona a única resposta correta.

- 1** Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sucessões tais que  $u_n \rightarrow 2$  para  $n \geq 300$ ,  $v_n \leq \frac{(u_n)^2 - 1}{u_n}$ . Qual não pode ser o valor de  $\lim v_n$ ?
- (A)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{3}{2}$   
 (B) 1 (D) 2
- 2** Considera as sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  tais que:
- $$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n+1}$$
- Sabendo que para  $n \geq 1000$  se tem  $v_n \leq -\frac{n}{u_n}$ , qual é o valor de  $\lim v_n$ ?
- (A)  $-\infty$  (C) 1  
 (B) 0 (D)  $+\infty$
- 3** Sejam  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  e  $(w_n)$  três sucessões tais que  $\lim v_n = 0$ ,  $\lim w_n = 2$  e para  $n \geq 10^6$  tem-se
- $$\frac{v_n + 2}{w_n} \leq u_n \leq (w_n)^{\frac{1}{n}}$$
- Qual é o valor de  $\lim \sqrt{\frac{4}{u_n}}$ ?
- (A)  $-\infty$  (C) 2  
 (B) 1 (D)  $+\infty$
- 4** Qual é o valor de  $\lim \frac{n^2 + \cos(n)}{1 - n^2}$ ?
- (A)  $-\infty$  (C) 1  
 (B) -1 (D)  $+\infty$
- 5** Sejam  $g$  a função de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$  definida por  $g(x) = \frac{1 - e^{x+3}}{x(x+3)^2}$  e  $h$  uma função real de variável real tal que  $h(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x < -3$ . Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$ ?
- (A)  $-\infty$  (C) 1  
 (B) 0 (D)  $+\infty$
- 6** Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^+$ , estritamente decrescente, tal que a reta de equação  $y = -2$  é assíntota horizontal ao seu gráfico. De uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , sabe-se que  $(f(x))^2 \leq g(x) \leq f(x) + 6$ ,  $\forall x \geq 1$ . Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2g(x) - 8}{\ln(g(x) - 3)}$ ?
- (A) 1 (C) 3  
 (B) 2 (D) 4
- 7** Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por
- $$f(x) = \frac{2^{1+\sin x} - 1}{x^2 + 1}$$
- Seja  $g$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$  tal que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ . Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função  $g$ ?
- (A)  $\frac{x}{x^2 + 1}$  (C)  $\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$   
 (B)  $\frac{1}{x^2 + 1}$  (D)  $\frac{3}{x^2 + 1}$
- 8** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $\mathbb{R}$  tais que:
- $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $x < 3 \Rightarrow g(x) > 0$
  - $(f \times g)(2) > 0$ ,  $(f - g)(2) = -2$  e  $g(4) = -g(2)$
- Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?
- (A)  $\exists c \in ]2, 4[ : g(c) = 0$   
 (B)  $\exists c \in ]2, 4[ : g(c) = -2$   
 (C)  $\exists c \in ]2, 4[ : g(c) = -3$   
 (D)  $\exists c \in ]2, 4[ : g(c) = 1$